

**PRAKTIKUM FÜR FORTGESCHRITTENE  
A2 STERN-GERLACH-VERSUCH**

MARCEL KAPPEL  
UND  
MATTHIAS MÜLLER

---

Donnerstag, den 14. Januar 2005, 9 Uhr  
Betreuer: Dr. Frübing.

## 1. GRUNDLAGEN ZU STIMULIERTEN STREUPROZESSEN

siehe Versuchsanleitung <http://www.uni-potsdam.de/u/physik/fprakti/ANLEIA2.pdf> im Internet.

## 2. HINFÜHRENDE AUFGABEN

- (1) *Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Drehimpuls und dem magnetischen Moment eines Elektrons auf einer Kreisbahn?*

Das magnetische Moment, das durch den Bahnumlauf des Elektrons um den Kern entsteht, ist gegeben durch

$$(1) \quad \mu_e = I \cdot A$$

$\mu_e$  - magnetische Moment,

$I$  - Stromstärke,

$A$  - von der Stromschleife umrandete Fläche.

Die Stromstärke  $I$  ist: Ladung  $e$  des Elektrons durch Umlaufzeit. Die Umlaufzeit ist Weg ( $= 2r\pi$ ) durch Geschwindigkeit  $v$ . Also gilt:

$$\begin{aligned} I &= \frac{ev}{2r\pi} \\ A &= r^2 \cdot \pi \\ \Rightarrow \mu_e &= \frac{ev}{2r\pi} \cdot r^2\pi = \frac{1}{2} e \cdot (\vec{v} \times \vec{r}). \end{aligned}$$

Der Drehimpuls eines Teilchens der Masse  $m$  auf einer Kreisbahn ist

$$(2) \quad \vec{L} = m \cdot (\vec{v} \times \vec{r}).$$

Bildet man das Verhältnis

$$\frac{\text{magnetisches Moment } \mu_e}{\text{Bahndrehimpuls des Elektrons } |\vec{L}|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot e}{m},$$

genannt der gyromagnetische Quotient, lässt sich daraus das Verhältnis Ladung  $e$  / Masse  $m$  des Elektrons berechnen. Für den Betrag des Vektors verwenden wir das Skalar,  $|\vec{L}| = L$ .

Nur selten wird jedoch der theoretisch errechnete Wert experimentell bestätigt. Im allgemeinen ist der Wert grösser und zwar um einen Zahlenfaktor, der meist zwischen eins und zwei liegt. Diesen Faktor nennt man den Landé-Faktor  $g$ .

Wäre allein der Bahndrehimpuls für das magnetische Moment der Elektronen verantwortlich, so hätte  $g$  den Wert 1. Es ist allerdings der Fall, dass die Elektronen ausser ihrer kreisförmigen Bahnbewegung auch eine kreiselnde Bewegung um ihre eigene Achse ausführen. Sie besitzen also ausser einem Bahndrehimpuls auch einen Eigendrehimpuls oder Spin, welcher ebenfalls ein magnetisches Moment erzeugt.

Mit Einbeziehung des Spins in Form des Landé-Faktor  $g$  ergibt sich letztlich folgender Zusammenhang:

$$(3) \quad \mu_e = \frac{e g}{2 m} \cdot L$$

- (2) *Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Drehimpuls und dem magnetischen Moment einer rotierenden geladenen Kugel vom Radius  $R$  mit der Oberflächenladungsdichte  $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ ? Die Ladung sei auf der Oberfläche gleichmässig verteilt und die Kugel rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .*

Wir betrachten dazu den Strom  $\delta I(\varphi)$ , der durch ein Ringelement der Kugeloberfläche fliesst:

$$\begin{aligned} \delta I(\varphi) &= \frac{Q}{t} = \frac{\sigma \cdot A}{t} \\ &= \frac{\sigma \cdot 2\pi R \cdot R d\varphi \cdot v}{s} \\ &= \frac{\sigma \cdot 2\pi R \cdot R d\varphi \cdot \omega \cdot R \sin\varphi}{2\pi R} \\ \delta I(\varphi) &= \sigma \cdot R d\varphi \cdot \omega \cdot R \sin\varphi. \end{aligned}$$

$\varphi$  ist der Winkel zwischen der Drehachse der Kugel und der Verbindungslinie des Oberflächenpunktes mit dem Mittelpunkt der Kugel.

Das magnetische Moment dieses Ringelements lautet

$$\delta\mu(\varphi) = \text{Fläche} \cdot \text{Strom} = \pi R^2 \sin^2\varphi \cdot \delta I$$

oder

$$\begin{aligned} \delta\mu(\varphi) &= \pi R^2 \sin^2\varphi \cdot \sigma \cdot R d\varphi \cdot \omega \cdot R \sin\varphi \\ \delta\mu(\varphi) &= \pi R^4 \sin^3\varphi \cdot \sigma \cdot d\varphi \cdot \omega. \end{aligned}$$

Den Betrag des gesamten magnetischen Moments erhält man durch Integration über  $\varphi$ . Er ist

$$\begin{aligned}\mu &= \pi R^4 \cdot \omega \cdot \sigma \cdot \int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi \\ \mu &= \frac{4}{3} \pi R^4 \cdot \omega \cdot \sigma \\ \mu &= \frac{4}{3} \pi R^4 \cdot \omega \cdot \frac{Q}{4\pi R^2} \\ \mu &= \frac{1}{3} R^2 \cdot \omega \cdot Q.\end{aligned}$$

Der Drehimpuls  $L$  einer Kugel ist

$$L = \frac{2}{5} m \cdot R^2 \omega,$$

somit ergibt sich für den Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls und dem magnetischen Moment der rotierenden Kugel

$$(4) \quad \mu = \frac{5}{6} \frac{Q}{m} L.$$

(3) *Warum wird ein inhomogenes Magnetfeld benötigt?*

Die Kalium-Atome werden in der  $z$ -Richtung durch die Kraft

$$(5) \quad F_z(x, y) = \mu_z \frac{\partial B_z(x, y)}{\partial z}$$

abgelenkt. Es ist also ein Gradient des Magnetfeldes in  $z$ -Richtung vonnöten, da ansonsten  $\frac{\partial B_z(x, y)}{\partial z} = 0$  wäre und keine Ablenkung stattfinden würde.

(4) *Warum wählt man ein einwertiges Metall für den Versuch?*

Das magnetische Moment eines Atoms ist durch den Bahndrehimpuls  $L$  der Elektronen, der Orientierung des Elektronenspins  $S$  und des Kernspins  $I$  des Atomkerns bestimmt.

$$\mu_{ges} = \mu_L + \mu_S + \mu_I$$

Hat ein Atom, wie z.B. das Heliumatom He zwei Elektronen, dann haben diese beiden Elektronen im Grundzustand sowohl einen entgegengesetzt gerichteten Umlauf als auch einen entgegengesetzt gerichteten Spin. Die

magnetischen Momente heben sich somit auf. Auf Grund dieses Umstands liefern auch abgeschlossene Schalen keinen Beitrag zum magnetischen Moment.

Der Kernspin ist durch die wesentlich grössere Masse der Nukleonen im Vergleich zu den Elektronen zu vernachlässigen, da das magnetische Moment in einem indirekt proportionalen Verhältnis zur Masse steht.

Desweiteren kommt in unserem Beispiel, einem Versuch mit Kalium, einem Alkalimetall, hinzu, dass die Entartung von Zuständen mit verschiedenen Bahndrehimpulsen durch die Abschirmung des Kerns durch innere Elektronen aufgehoben ist. So ist die Nebenquantenzahl  $l$  des einzigen Valenzelektrons gleich Null und es existiert kein Bahndrehimpuls. So kann näherungsweise davon ausgegangen werden, dass das gesamte magnetische Moment durch das Spinnmoment des Valenzelektrons abgeschätzt werden kann. Und so handelt es sich bei dem von uns im folgenden beschriebenen Versuch um eine Bestimmung des elementaren magnetischen Moments, **dem Bohr-Magneton** mit einem Tabellenwert von  $\mu_B = 9,284 \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$  (Quelle: Bergmann/Schäfer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band2).

(5) *Warum funktioniert der Versuch nicht mit freien Elektronen?*

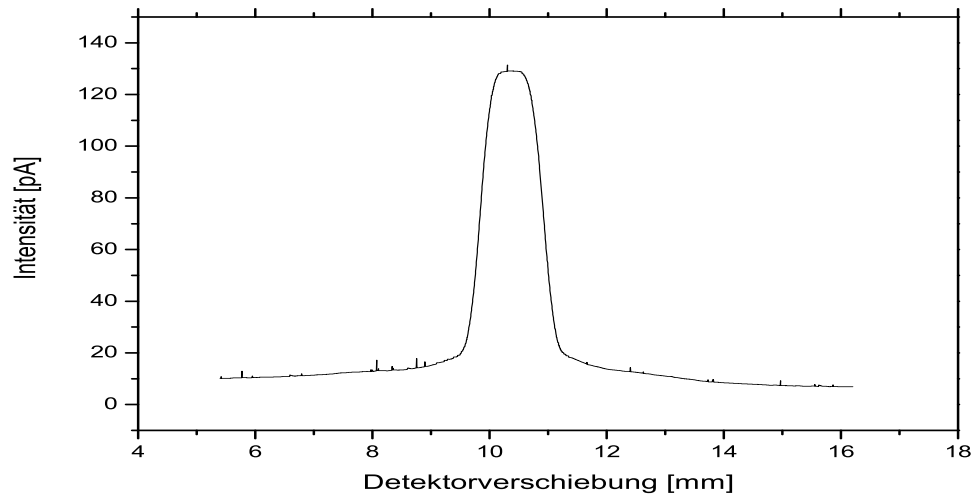
Ein freies Elektron ist Träger einer Elementarladung und wird während einer Bewegung durch ein Magnetfeld durch die Lorentz-Kraft abgelenkt. Dieser Effekt würde die Messung der von dem magnetischen Moment abhängigen Ablenkung sehr erschweren. Das Kalium-Atom, nach aussen hin elektrisch neutral, wird nicht von der Lorentz-Kraft erfasst.

### 3. VERSUCHSAUSWERTUNG

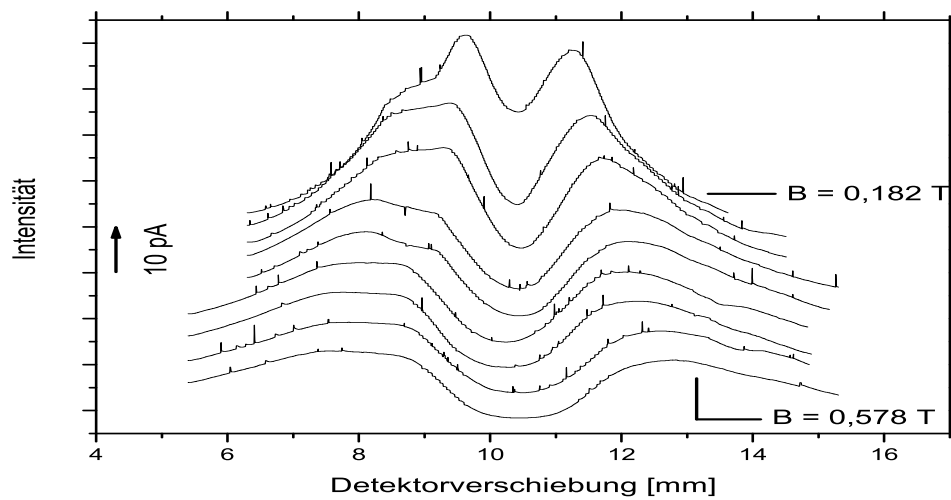
#### 3.1. Berechnung des magnetischen Moments.

Als erstes soll noch einmal graphisch von uns das Ergebnis bestätigt werden, welches vor ca. 80 Jahren soviel Aufsehen erzeugte: Die Aufspaltung des Teilchenstrahls nach dem Passieren eines inhomogenen Magnetfeldes. Erwartet wurde damals eine kontinuierliche Verteilung. Doch es bildeten sich Bei Gerlach und Stern wie auch heute bei uns zwei diskrete Maxima aus: Ein erster Beweis für eine Quantelung des Spins des Elektrons und nicht etwa einer kontinuierlichen Verteilung der Werte.

Zuerst der gebündelte Strahl aus Kaliumatomen ohne angelegtes äusseres Magnetfeld:



Dann derselbe Teilchenstrahl, welcher nun ein inhomogenes Magnetfeld passierte, dessen magnetische Induktion von  $B = 0,182\text{T}$  bis  $B = 0,578\text{T}$  variiert wurde:



Deutlich ist die Aufspaltung des Strahls, die Ausbildung von zwei separaten Intensitätsmaxima links und rechts vom Maximum ohne Magnetfeld zu erkennen. Das magnetische Moment  $\mu_{s,z}$  sowie dessen Unsicherheit  $\Delta\mu_{s,z}$  konnte nun durch Ausmessen der Lagen der Intensitätsmaxima durch die Gleichung

$$(6) \quad u = \frac{lL(1 - \frac{L}{2l})\mu_{s,z}}{6kT} \frac{\partial B}{\partial z}$$

$u$  - Abstand Intensitätsminima von -maxima,

$l$  - Abstand Eintrittsebene des Magnetfeldes von der Detektorebene:  $l = 455 \text{ mm}$ ,

$L$  - Länge der Polschuhe:  $L = 70 \text{ mm}$ ,

$T$  - Temperatur im Ofen:  $T = 461 \text{ K}$ ,

$\frac{\partial B}{\partial z}$  - Feldgradient

ermittelt werden. Hergeleitet wurde Glg (6) durch bestimmen der Extremstellen der Teilchenstromdichte  $J$ . Der Rechnung wird dabei die Näherung *beliebig schmaler Strahlkasten* zugrunde gelegt.

Die Inhomogenität, d.h. der Feldgradient  $\frac{\partial B}{\partial z}$  wurde bestimmt durch die Gleichung

$$(7) \quad \epsilon = \left| \frac{\partial B}{\partial z} \right| \frac{a}{B} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial B}{\partial z} \right| = \epsilon \frac{B}{a}.$$

$\epsilon$  - Proportionalitätsfaktor,

$B$  - magnetische Induktion,

$a$  - Radius des konvexen Polschuhs:  $a = 2,5 \text{ mm}$

Den uns in dieser Formel noch fehlenden Wert für die magnetische Induktion  $B$  im Zentrum des Helmholtzspulenpaars erhalten wir als Funktion der Spulenstromstärke  $I_{sp}$ , welche lautet:

$$(8) \quad B(I_{sp}) = -0,00512 + 0,55713 I_{sp} + 0,26883 I_{sp}^2 - 0,24218 I_{sp}^3.$$

Durch Variation des Spulenstroms  $I_{sp}$  erhielten wir folgende Wertepaare:

$I_{sp} / \text{A}$	$B / \text{T}$	$\partial B / \partial z / \text{T} \cdot \text{mm}^{-1}$	$u / \text{mm}$	$u / \text{Skt}$	$T / \text{K}$
0.304	0.182	0.070	0.882	49	461
0.424	0.260	0.100	1.188	66	461
0.506	0.314	0.121	1.206	67	461
0.590	0.367	0.141	1.584	88	461
0.707	0.437	0.169	1.584	88	461
0.767	0.471	0.182	1.818	101	461
0.830	0.504	0.194	1.854	103	461
0.915	0.544	0.210	2.070	115	461
0.998	0.577	0.223	2.286	127	461

Die Lagen der Intensitätsmaxima  $u$  wurden dem Diagramm entnommen, indem der Abstand zwischen dem Intensitätsminima und dem davon rechts liegenden Intensitätsmaxima abgelesen wurde. Das rechte Maxima bot sich eher an als das links Liegende, 461da der rechte Scheitel der Kurve besser zu erkennen war. Der Theorie nach verläuft die Aufspaltung symmetrisch, so ist die Wahl zwischen dem rechten und dem linken Intensitätsmaxima zum Ablesen in diesem Fall beliebig.

Über dem Feldgradienten  $\frac{\partial B}{\partial z}$  wurde  $u$  dann aufgetragen. Das magnetische Moment wurde aus dem Anstieg der linearen Ausgleichsgeraden mit Hilfe von Gleichung (6) errechnet.

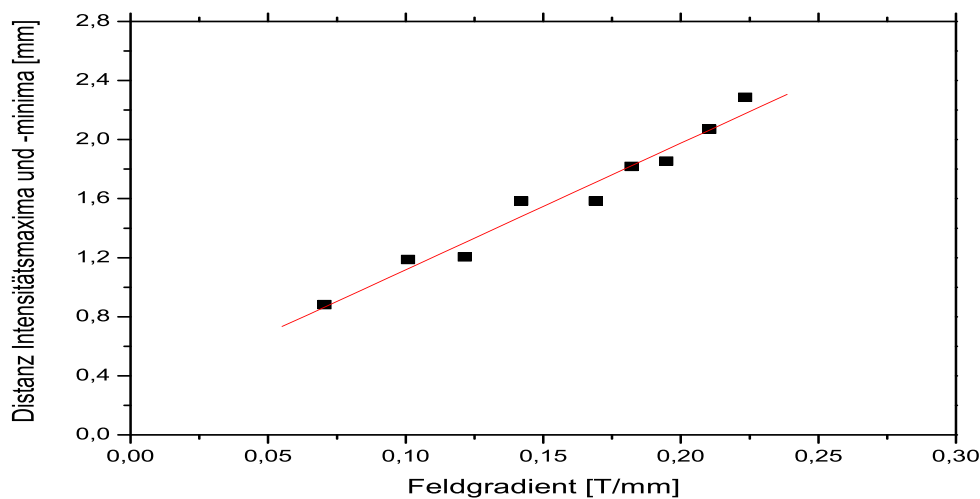


ABBILDUNG 1. Abhängigkeit der Lagen der Intensitätsmaxima  $u$  von dem Feldgradienten  $\frac{\partial B}{\partial z}$

Die Geradengleichung des linearen Fits lautet

$$(9) \quad u = \underbrace{(8,573 \pm 0,623)}_m \frac{\partial B}{\partial z} + \underbrace{0,261 \pm 0,053}_c.$$

Der Anstieg  $m$  dieser Geraden ist laut Glg (6) gleichzusetzen mit

$$m = \frac{lL(1 - \frac{L}{2l})\mu_{s,z}}{6kT}$$

Das Stellen wir nach  $\mu_{s,z}$  um, setzen die Werte ein und es ergibt sich:

$$(10) \quad \mu_{s,z} = \frac{m \cdot 6kT}{lL(1 - \frac{L}{2l})}$$

$$\mu_{s,z} = \frac{8,573 \cdot 6 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 461 \text{ K}}{455 \text{ mm} \cdot 70 \text{ mm} (1 - \frac{70 \text{ mm}}{2 \cdot 455 \text{ mm}})}$$

$$\underline{\underline{\mu_{s,z} = 1,114 \cdot 10^{-23} \text{ J T}^{-1}}}$$

Dieser Wert kommt dem Tabellenwert des Bohrschen Magnetons von  $9,284 \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$  schon recht nahe, doch es gibt eine Abweichung von

rund 20 %. Dazu im nächsten Abschnitt mehr.

### 3.2. Fehlerbetrachtung.

Die einzige Grösse in Gleichung (10) für das magnetische Moment, welche mit einer Unsicherheit belastet ist, ist der Anstieg der Regressionsgeraden  $m$ . In diesen gehen statistische und systematische Fehler ein. Die anderen Grössen aus Glg. (10), wie die Gerätegrössen  $l$  und  $L$ , aber auch die Temperatur  $T$ , nähern wir mit konstant an. Für die Temperatur halten wir das für gerechtfertigt, da bei allen neun von uns getätigten Messreihen gleichbleibend 461 K abzulesen waren. Eine systematische Ungenauigkeit des Temperaturmessers soll hier vernachlässigt werden.

Die Suche gilt also dem relativen Fehler von  $m$ , da dieser auf  $\mu_{s,z}$  übernommen werden kann.

$m$  ergab sich aus der linearen Regressionsgeraden Glg (9). Diese Gerade verläuft nicht durch den Ursprung, wie es nach Glg (6) eigentlich zu erwarten gewesen wäre, sondern hat einen Offset von  $c = 0,261\text{mm}$  (siehe Geradenglg (9)). Dieser Offset zeigt einen systematischen Fehler an, welcher ca. 16% des mittleren Abstands  $u$  beträgt. dieser relative Fehler setzt sich in  $m$  fort zu  $\Delta_{\text{sys}}m = 1,372 \frac{\text{mm}^2}{\text{T}}$ .

Der statistische Fehler von  $m$  wird errechnet durch die Unsicherheit, welche durch die Regressionsgerade geliefert wurde ( $\Delta_1m = 0,623 \frac{\text{mm}^2}{\text{T}}$ ) und der Unsicherheit  $\Delta_2m$ , welche resultiert aus den Unsicherheiten der in  $m$  einflussenden Grössen:

$$(11) \quad m = \frac{u - c}{\frac{\partial B}{\partial z}}$$

Mit Glg (7) folgt daraus:

$$(12) \quad m = \frac{(u - c) a}{\epsilon B}$$

Zu erhalten ist  $\Delta m$  dann mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes von Gauß:

$$(13) \quad \Delta_2m = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial m}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial u} &= \frac{a}{\epsilon B} \Delta u & \frac{\partial m}{\partial c} &= -\frac{a}{\epsilon B} \Delta c \\ \frac{\partial m}{\partial \epsilon} &= -\frac{(u - c) a}{\epsilon^2 B} \Delta \epsilon & \frac{\partial m}{\partial B} &= -\frac{(u - c) a}{\epsilon B^2} \Delta B \end{aligned}$$

Der Wert von  $\Delta u$  konnte nur grob aus dem Diagramm abgeschätzt werden.  $\Delta B$  liegt die statistische Unsicherheit des Ampèremeters und der Fehler der durch

einen Fit ermittelten Polynomfunktion  $B(I_{sp})$  (Glg(8)) zugrunde. Die angegebenen Absolutwerte gelten für einen Spulenstrom von 0,304 A:

$$\begin{aligned}\Delta u &\approx 40\% = 0,353 \text{ mm} & \Delta \epsilon &= 0,023 \\ \Delta B &\approx 5\% = 0,009 \text{ T} & \Delta c &= 0,053 \text{ mm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \frac{\partial m}{\partial u} \Delta u &= 5,020 \frac{\text{mm}^2}{\text{T}} & \frac{\partial m}{\partial c} \Delta c &= -0,754 \frac{\text{mm}^2}{\text{T}} \\ \frac{\partial m}{\partial \epsilon} \Delta \epsilon &= -0,210 \frac{\text{mm}^2}{\text{T}} & \frac{\partial m}{\partial B} \Delta B &= -0,437 \frac{\text{mm}^2}{\text{T}}\end{aligned}$$

Nach quadrieren, addieren und Wurzel ziehen ergibt sich

$$\Delta_2 m = 5,099 \frac{\text{mm}^2}{\text{T}}.$$

Die beiden statistischen Fehler können durch Addition miteinander verrechnet werden:

$$(14) \quad \Delta_{stat} m = \Delta_1 m + \Delta_2 m = 5,722 \frac{\text{mm}^2}{\text{T}}.$$

Ebenso dann der Wert der statistischen mit dem der systematischen Unsicherheit:

$$(15) \quad \Delta m = \Delta_{stat} m + \Delta_{syst} = 5,722 \frac{\text{mm}^2}{\text{T}} + 1,372 \frac{\text{mm}^2}{\text{T}} = 7,094 \frac{\text{mm}^2}{\text{T}}.$$

Wird dieser Wert der absoluten Abweichung in eine relative Abweichung umgerechnet, ergibt sich ein Fehler von 82,7%, der sich auf unser Ergebnis des magnetischen Moments fortsetzt.

$$\begin{aligned}\mu_{s,z} &= 1,114 \cdot 10^{-23} \pm 82,7\% \text{ J T}^{-1} \\ \underline{\underline{\mu_{s,z} &= (1,114 \pm 0,922) \cdot 10^{-23} \text{ J T}^{-1}}}\end{aligned}$$

(Marcel Kappel)

(Matthias Müller)