Fortgeschrittenen Praktikum
SS 2005

Humboldt-Universität zu Berlin

Versuch Qantenkryptographie

Sebastian Melzer [1]
Mirko Meissner
Adel Hajy
Gruppe 17.2005

3. Mai 2005

[1] melzer@physik.hu-berlin.de

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung und theoretische Grundlagen II
1.1 Aufgabenstellung II
1.2 Theoretische Grundlagen II
1.2.1 Fehlerrechnung II
1.2.1.1 Fehlerrechnung für n $<$ 6 II
1.2.1.2 Fehlerrechnung für n $\geq$ 6 II

2 Versuchsaufbau III

3 Versuchsdurchführung III

4 Auswertung IV
4.1 Aufgabe 1 IV
4.2 Aufgabe 2 V
4.3 Funktionsweise des Elektrooptischen Modulators (EOM) VI
4.4 Mögliche Einwirkungen des EOM's auf das Meßergebniss VI
4.5 Diskussion der Frequenzabhängigkeit VI
4.6 Diskussion des Einflusses der Dämpfung VII

1 Aufgabenstellung und theoretische Grundlagen

1.1 Aufgabenstellung

1. Zeige, dass zirkulare und geradlinige Basen ebenso die Bedingungen der gegenseitigen genormten Orthogonalität und der gleichlangen Projektion erfüllen.
2. Welche Dämpfung wird für eine Laserdiode (5 mW, 633 nm, 10 ns Pulslänge) gebraucht, um eine Wahrscheinlichkeit von $< 10^{-3}$ der Emission von mehr als einem Photon pro Puls zu erreichen.
3. Adjustiere alle Spiegel, um den Laserstrahl möglichst genau durch die Versuchsanordnung zu führen.
4. Finde eine Laser-Modulationsfreqenz, die hoch ist, aber immer noch saubere Pulse garantiert.
5. Finde mit der LabView-Software, den λ-Platten, Analyzern und dem Photometer die richtige Voltzahl am EOM, um die verschiedenen Basen hinter dem EOM darstellen zu können.
6. Übertrage ein Bild deiner Wahl mittels der Quantenkryptographie.

1.2 Theoretische Grundlagen

1.2.1 Fehlerrechnung

1.2.1.1 Fehlerrechnung bei einer Stichprobe vom Umfang n $<$ 6 .

$x_z :=$ zufälliger Fehler
$x_s :=$ systematischer Fehler

Messunsicherheit:

$$u = \sqrt{\sum x_z^2 + \sum x_s^2} \tag{1}$$

Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta F \approx F_x \Delta x + F_y \Delta y + ... \tag{2}$$

1.2.1.2 Fehlerrechnung für n $\geq$ 6 .

Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3}$$

Standartabweichung:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{4}$$

Vertrauensbereich:

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{5}$$

Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta F \approx F_x \Delta x + F_y \Delta y + ... \tag{6}$$

2 Versuchsaufbau

Alice:

Das Licht wird erzeugt durch einen 5 mW Dioden-Laser mit einer Wellenlänge von 633 nm. Mittels eines Polarisators wird dieser Laserstrahl in einen definierten Polarisationszustand gebracht. Das polarisierte Licht wird dann durch einen EOM geschickt, mit welchem durch Wahl eines $\lambda/2$ bzw. $\pm\lambda/4$ - Plättchens die Polarisationsrichtung gedreht oder eine zusätzliche Phasenverschiebung eingestellt werden kann. Aus dem EOM kommt also entweder horizontal, vertikal, zirkular links oder zirkular rechts polarisiertes Licht heraus.

Bob:

Das von Alice gesendete Licht wird von Bob ebenfalls durch einen EOM geschickt, mit welchem zufällig ein $\lambda/2$ bzw. $\pm\lambda/4$ - Plättchen eingestellt wird. Hinter diesem EOM wird das ankommende Licht mit einem weiteren Polarisator analysiert: Bei gleicher Wahl der Basis wie Alice wird nur Licht mit der entsprechenden Polarisation hindurchgelassen, wohingegen der andere Polarisationszustand vollständig absorbiert wird. Bei falscher Wahl der Basis ist die Wahrscheinlichkeit durchgelassen zu werden genau 0.5 (diese Messung jedoch wird bei der Auswertung der Daten erst gar nicht in Betracht gezogen). Wenn das Licht hindurchkommt, wird es mittels APD detektiert.

3 Versuchsdurchführung

Natürlich muß damit begonnen werden, alle optischen Geräte (Spiegel, Polarisatoren, etc.) genau zu justieren, damit der Laserstrahl optimal durch die Anordnung geführt wird.

Im nächsten Schritt muß bestimmt werden, bei welchen angelegten Spannungen die EOM's von Alice und Bob jeweils die Funktion der $\lambda/2$ bzw. $\pm\lambda/4$ - Plättchen übernehmen. Dazu wird vor den jeweiligen EOM ein Polarisator gestellt, so daß man den Zustand des in den EOM eintretenden Lichtes kennt (z.B. vertikal linear). Hinter den EOM wird ein Analysator parallel eingestellt. Man mißt nun die Intensität des durch den Analysator kommenden Lichtes in Abhängigkeit der eingestellten Spannung am EOM:

- Ist die gemessene Intensität ein Maximum, so funktioniert der EOM als $0\ \lambda$ bzw. $\pm\lambda$ Plättchen
- Wird die Intensität minimal (ohne Streulicht wäre das Minimum Null!), so wirkt der EOM gerade wie ein $\lambda/2$ Plättchen
- Ist die Intensität die Hälfte vom Maximum, so haben wir ein $\pm\lambda/4$ Plättchen, wobei das Vorzeichen keine Rolle spielt, es muß nur der zweite EOM entsprechend eingestellt werden: Durchläuft der Lichtstrahl den Weg Polarisator - EOM (Alice) - EOM (Bob) - Analysator, wobei die EOM's

gerade auf diese Plättchen eingestellt sind, dann ist die gemessene Intensität minimal bei gleicher Einstellung (z.B. zwei $+\lambda/4$ Plättchen ergeben ein $\lambda/2$ Plättchen) und maximal bei entgegengesetzter Einstellung

Nachdem nun alle Einstellungen abgeschlossen sind, kann das Experiment beginnen.
Die wesentlichen Elemente sind nun in folgender Reihenfolge aufgebaut:
Alice: Laser-Diode - Dämpfungsplatten - Polarisator - EOM
Bob: EOM - Analysator - APD

Mit einem Frequenzgenerator kann die Repetitionsfrequenz der aus der Diode tretenden Pulse kontrolliert werden. Die Dämpfungsplatten ermöglichen eine Abschwächung des Laserstrahls, derart, daß die einzelnen Pulse nur noch null bzw. ein Photon enthalten (natürlich mit Abweichungen entsprechend einer Poisson-Statistik). Für die Funktionsweisen der übrigen Elemente siehe Versuchsaufbau. Desweiteren werden die EOM's von Alice und Bob selbstverständlich nicht von Hand sondern mittels eines Generators zufällig auf die verschiedenen Plättchen eingestellt.

4 Auswertung

4.1 Aufgabe 1

Die zirkularen Basiszustände ergeben sich aus den Linearen wie folgt:

Links-Zirkular: $|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\rightarrow\rangle + i|\uparrow\rangle\right)$
Rechts-Zirkular: $|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\rightarrow\rangle - i|\uparrow\rangle\right)$

Prüfung der Orthonormalität:

$\langle L|L\rangle = \frac{1}{2}\langle \rightarrow +i\uparrow|\rightarrow +i\uparrow\rangle =$

$= \frac{1}{2}\left(\langle\rightarrow|\rightarrow\rangle + \langle\rightarrow|i\uparrow\rangle + \langle i\uparrow|\rightarrow\rangle + \langle i\uparrow|i\uparrow\rangle\right) = 1$

$\langle R|R\rangle = \frac{1}{2}\langle \rightarrow -i\uparrow|\rightarrow -i\uparrow\rangle = 1$

$\langle L|R\rangle = \frac{1}{2}\langle \rightarrow +i\uparrow|\rightarrow -i\uparrow\rangle = \frac{1}{2}(1+0+0-1) = 0$

$\langle R|L\rangle = \langle L|R\rangle^* = 0$

Die zirkularen Polarisationszustände bilden also ebenfalls eine Orthonormalbasis.

Prüfung der Projektionen:

$\langle\rightarrow|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\rightarrow|\rightarrow +i\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sowie $\langle L|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\langle\rightarrow|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\rightarrow|\rightarrow -i\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sowie $\langle R|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\langle\uparrow|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\uparrow|\rightarrow +i\uparrow\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}$ sowie $\langle L|\uparrow\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}$

$\langle\uparrow|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\uparrow|\rightarrow -i\uparrow\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}$ sowie $\langle R|\uparrow\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow |\langle\rightarrow|L\rangle|^2 = |\langle\rightarrow|R\rangle|^2 = |\langle\uparrow|L\rangle|^2 = |\langle\uparrow|R\rangle|^2 = \frac{1}{2}$

Die Projektionen der einzelnen Zirkularen auf die linearen Basiszustände und umgekehrt haben alle die Länge $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Bei Verwendung einer falschen Basis von Bob (bzw. Eve) ist demnach jeder Meßwert gleichwahrscheinlich. Demzufolge können die Lineare und die zirkulare Basis zur sicheren Übertragung von Quantenzuständen dienen.

4.2 Aufgabe 2

Daten der Laserdiode: $P = 5$ mW, $\lambda = 633$ nm, $\tau = 10$ ns.

Die Energie E_p pro Photon ist $E_p = h\frac{c}{\lambda}$. Somit ist die Anzahl N der Photonen pro Puls $N = \frac{\tilde{E}}{E_p}$, wobei $\tilde{E}$ die Gesamtenergie des Laserpulses ist.
Die besten Ergebnisse erreichten wir bei einer Modulationsfrequenz des Lasers von $f = 30,537$ kHz. Daher nehmen wir diesen Wert als Grundlage zur weiteren Berechnung. Somit wäre die Gesamtenergie pro Puls

$$\tilde{E} = \frac{P}{f}$$

und die Anzahl der Photonen pro Puls somit

$$N = \frac{P\lambda}{fhc} = \frac{\tilde{E}}{E_p} \approx 5.2 \cdot 10^{11}$$

hiermit ergibt sich die mittlere Photonenanzahl k, die in einem Intervall, also z.B. von Impulsanfang zu Impulsanfang, übertragen wird zu

$$k = DN$$

wobei D die Dämpfung ist.
Nun ist die Wahrscheinlichkeit n Elektronen bei einem bestimmten k zu detektieren durch die Poissonverteilung gegeben und errechnet sich zu

$$P(n,k) = \frac{k^n}{n!}e^{-k}$$

Da uns die Dämpfung interessiert, um eine Wahrscheinlichkeit von $w < 10^{-3}$, dass mehr als ein Photon pro Puls übertragen wird zu erreichen, betrachten wir das Komplementereigniss und berechnen die Wahrscheinlichkeit $\tilde{w}$ 0 oder 1 Photon zu detektieren. Die uns interessierende Wahrscheinlichkeit ist dann $w = 1 - \tilde{w}$ also

$$w = 1 - (P(0,k) + P(1,k)) = 1 - (e^{-k} + ke^{-k}) < 10^{-3}$$

suchen wir nun den Schwellwert für die Dämpfung D aus der Gleichung

$$e^{-k}(1+k) = 1 - 10^{-3}$$

erhalten wir numerisch den Wert von

$$D \approx 8 \cdot 10^{-14}$$

Dies stimmt nun nicht mit unserer benutzten Dämpfung überein, daher vermuten wir, dass die Dämpfung des Systems an anderen Stellen ist so gross ist, dass sie diese Differenz in etwa ausgleicht (siehe EOM). Obwohl dies unwahrscheinlich klingt.

4.3 Funktionsweise des Elektrooptischen Modulators (EOM)

Die Wirkungsweise des EOM basiert auf dem linearen elektrooptische Effekt, auch Pockelseffekt genannt. Dieser beschreibt die Änderung der Brechzahl eines optischen Mediums unter Einwirkung eines äußeren elektrischen Feldes. Bestimmte Kristalle werden in Richtung der spannungslos isotropen optischen Achse dann doppelbrechend. Fällt linear polarisiertes Licht in Richtung der optischen Achse des Kristalls ein, so bleibt dessen Polarisationszustand ohne elektrische Spannung unverändert. Mit Spannung verläßt das Licht den Kristall jedoch im allgemeinen elliptisch polarisiert.
In Analogie zur konventionellen Polarisationsoptik lassen sich damit Phasenplatten herstellen, die eine Phasenverschiebung zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl erzeugen. Im Unterschied zur konventionellen Optik ist jedoch der Betrag der Phasenverschiebung durch die angelegte äußere elektrische Spannung einstellbar.
Bei gegebener Wellenlänge kann somit insbesondere eine $\lambda/2$ - bzw. $\lambda/4$ - Phasenverzögerung erreicht werden.

4.4 Mögliche Einwirkungen des EOM's auf das Meßergebniss

Einfluss auf das Meßergebniss könnte z.B. durch eine Änderung des Absorptionsverhaltens des Kristalls bei unterschiedlichen Spannungen entstehen, da das elektrische Feld die Potentialtöpfe der Atome ändert. Auch verändert sich durch die Änderung der Brechzahl die Reflexion des Lichtstrahls. Somit besteht ein direkter dynamischer Einfluss auf die Dämpfung des Systems. Des Weiteren sind die Schaltgeschwindigkeiten durch die elektro-optische Wandlung auf etwa 100 GHz begrenzt, was in unserem Versuch allerdings keine Rolle spielte, da wir weit unter diesem Bereich agierten.

4.5 Diskussion der Frequenzabhängigkeit

An allen Diagrammen ist eine Gemeinsamkeit klar zu erkennen:
Mit steigender Frequenz steigt auch die Genauigkeit der Übertragung!

Interpretation:

Bei kleineren Repetitions-Frequenzen ν ist die Zeitdauer $\tau = \frac{1}{\nu}$ zwischen zwei Pulsen länger. In dieser Zwischenzeit dominiert das Hintergrundrauschen, z.B.

durch eventuelles Streulicht, das durch Reflexionen an den einzelnen Bauelementen (evtl. Staubkörner darauf) verursacht wird, die Messungen des APD. Dies kann man sich an einem einfachen Beispiel klar machen:

Die meisten gesendeten Pulse enthalten aufgrund der starken Dämpfung kein Photon. Nehmen wir an, in jedem zehnten Puls ist ein Photon (im folgenden L-Photon), in den neun übrigen keines (Zahlen fiktiv). Nehmen wir weiter an, daß durch Streulicht alle 10 s ein Streuphoton (im folgenden S-Photon) auf den APD trifft.

Bei einer Repetitions-Frequenz von 1 Puls alle 2s passiert folgendes:
Für 10 Pulse werden 20s benötigt. In diesen 20s treffen ein L-Photon und zwei S-Photonen, also insgesamt drei, auf den APD, wobei die beiden S-Photonen keine (bzw. willkürliche) Informationen tragen, aber dennoch von Bob gemessen werden. Dies ergibt also eine Fehlerquote von 67 Prozent.
Bei einer Repetitions-Frequenz von 1 Puls pro s passiert folgendes:
Für 10 Pulse werden 10s benötigt. In diesen 10s treffen ein L-Photon und ein S-Photon, also insgesamt zwei, auf den APD. Dies ergibt also eine Fehlerquote von 50 Prozent.

Hierbei wurde natürlich angenommen, daß Alice und Bob jeweils dieselbe Basis verwendet haben, da die Ereignisse sonst überhaupt nicht in Betracht gezogen werden. Aber es wird klar, daß durch größere Repetitions-Frequenzen der Fehler durch das Hintergrundrauschen kleiner und damit die Übertragungsgenauigkeit größer wird.

Weitere Vermutungen:

Bei hohen Frequenzen sollte sich eine Gerade in der Genauigkeit ergeben (am besten zu erkennen bei einer Dämpfung von 7.0 mit breitem Frequenzspektrum von 30 kHz bis 2 MHz), da die Zeit τ zwischen zwei Pulsen dann so kurz ist, daß der eben beschriebene Einfluß vom Streulicht vernachlässigbar wird und sich nur noch die frequenzunabhängigen Fehlerquellen bemerkbar machen.

Bei zu hohen Frequenzen sollte dann wieder ein Abfall der Genauigkeit zu beobachten sein, da das EOM dann aufgrund nicht mehr ausreichender Reaktionszeit unsauber arbeitet.

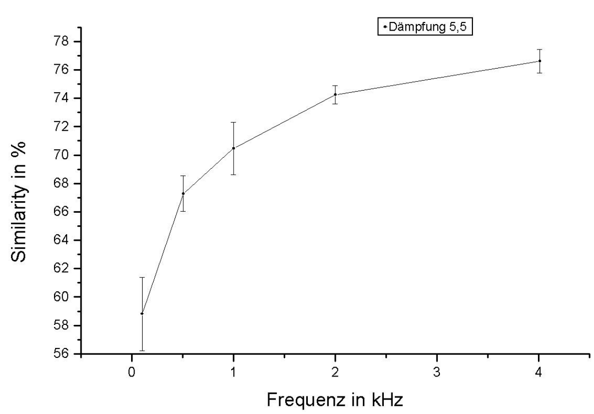
4.6 Diskussion des Einflusses der Dämpfung

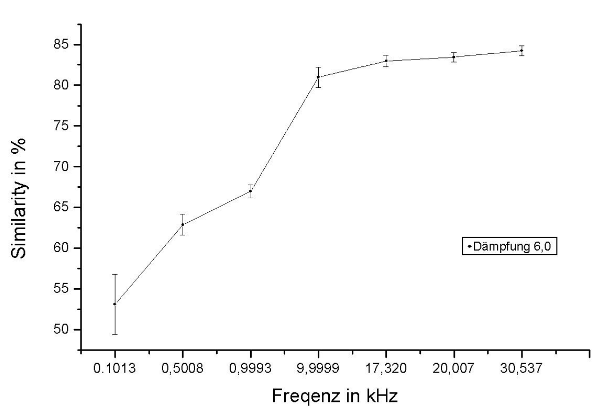
Aus den Diagrammen geht hervor, dass mit steigender Dämpfung die Qualität der Übertragung erst zunimmt und nach einem Peak wieder abnimmt. Dieser Peak, der bei uns das beste Resultat brachte, liegt bei einer Dämpfung von 6.0 ($D = 10^{-6}$).

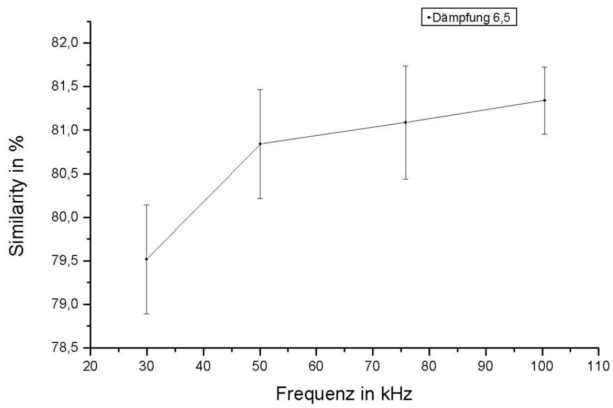
Ist die Dämpfung zu schwach (5.5), passieren viele Photonen pro Puls die Anordnung. Dies hat erst mal zum Nachteil, dass Eve Photonen abzweigen und deren Zustand messen kann, ohne dass Alice und Bob etwas davon mitbekommen. So kann Eve Teilinformationen über den Schlüssel erhalten, wenn sie noch

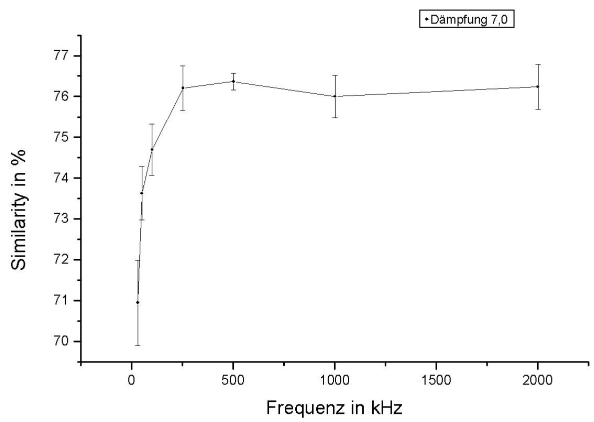
die Reihenfolge der benutzten Basen abhört.
Des Weiteren dürften viele Photonen pro Puls für mehr Streulicht durch Reflexionen an den Materialoberflächen in der Anlage sorgen, wovon ein Teil auch den Detektor von Bob erreicht und das Messergebniss beeinflusst, da diese Photonen durch die Streuprozesse einen anderen Zustand als den Ausgangszustand erlangt haben.
Durch Erhöhen der Dämpfung auf den Wert 6 erreichten wir eine maximale Ähnlichkeit der mit dem extrahierten Schlüssel übertragenen Daten von etwa 85 Prozent. Hier schienen wir in die Nähe von Einzelphotonenübertragungen gekommen zu sein, denn als wir die Dämpfung weiter erhöhten (6.5 und 7) verschlechterte sich das Ergebniss immer weiter, was eigentlich nur bedeuten kann, dass das Hintergrundrauschen mehr an Einfluss gewann, da die Anzahl der Leerimpulseßunahm.

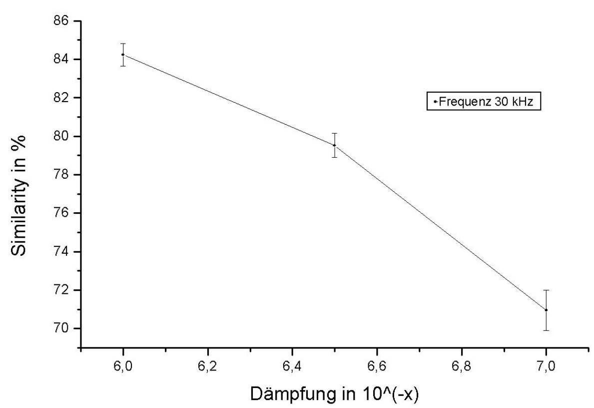
Bei einer festen Frequenz von 30 kHz liess sich der Abfall der Übertragungsqualität sehr gut beobachten. Leider konnten wir aufgrund der Beschränktheit der Messapparatur keine vernünftige Messreihe aufnehmen, sondern mussten uns auf 3 Messpunkte beschränken. Mit Hilfe von feineren Abstufungen in der Dämpfung und einem Detektor, der auch höhere Intensitäten verkraften kann, ließe sich sicher ein Maximum finden, bei dem die Übertragungsgüte auch noch besser als 85 Prozent wäre.






Dämpfung 6,5
Similarity in %
82,0
81,5
81,0
80,5
80,0
79,5
79,0
78,5
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
Frequenz in kHz


Dämpfung 7,0
Similarity in %
77
76
75
74
73
72
71
70
0
500
1000
1500
2000
Frequenz in kHz


Frequenz 30 kHz
Similarity in %
86
84
82
80
78
76
74
72
70
6,0
6,2
6,4
6,6
6,8
7,0
Dämpfung in 10^(-x)